ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2019

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Δευτέρα 10 Ιουνίου 2019

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α) Ορισμός. Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 15.

β) i) Η f: $A \to R$ έχει αντίστροφη όταν είναι 1-1 στο Α.

ii) Αν η συνάρτηση f: $A \to R$ είναι 1-1, τότε ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και τη συμβολίζουμε με f^{-1}, τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών f(A) της f και με την οποία κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει f(x)=y.

Α2. Θεώρημα. Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 142.

Α3. Απόδειξη. Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 135.

Α4. α) ΛΑΘΟΣ. Έστω η συνάρτηση f(x)=$\begin{cases} -1, \text{ αν } x<0 \\ 1 \ \ , \text{ αν } x>0 \end{cases}$. Ισχύει ότι f΄(x)=0 για κάθε

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, αλλά η f δεν είναι σταθερή, αφού παίρνει δύο διαφορετικές τιμές.

β) Έστω η συνάρτηση f: $R \to R$ με τύπο f(x)=$\begin{cases} x^2+1 \ , \text{ αν } x \neq 0 \\ 2019 \ , \text{ αν } x=0 \end{cases}$. Είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0}(x^2+1) = 1$,

ενώ f(0)=2019.

Α5. γ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ είναι η y=2. Άρα,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty}(e^{-x}+\lambda) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty}\left[\left(\frac{1}{e}\right)^x + \lambda\right] = 2, \Leftrightarrow \lambda = 2, \text{ αφού } \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x = 0 \quad \left(0 < \frac{1}{e} < 1\right).$$

Β2. Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, με $x \in R$.
Η $g(x)$ είναι συνεχής στο [2,3] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων με

$g(2) = f(2) - 2 = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0$ και $g(3) = f(3) - 3 = e^{-3} + 2 - 3 = \frac{1}{e^3} - 1 = \frac{1-e^3}{e^3} < 0$. Επομένως,

$g(2)g(3) < 0$. Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$ $\Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0$.

Επιπλέον $g'(x) = f'(x) - 1 = e^{-x}(-x)' = -\frac{1}{e^x} < 0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε η g(x) είναι συνάρτηση 1-1. Άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

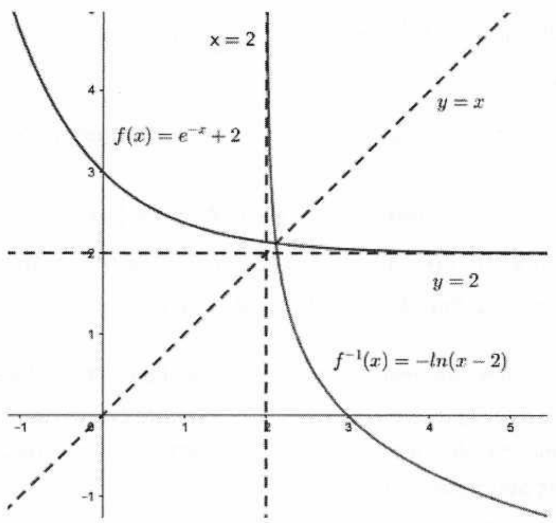
Β3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = -\frac{1}{e^x} < 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R , άρα και 1-1. Έτσι, η f είναι αντιστρέψιμη.

Έστω $f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x} + 2 = y \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2 \underset{\ln x\ 1-1}{\overset{y>2}{\Leftrightarrow}} \Leftrightarrow \ln e^{-x} = \ln(y-2) \Leftrightarrow -x = \ln(y-2) \Leftrightarrow x = -\ln(y-2)$, με y>2. Οπότε $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$ με x>2.

Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[-\ln(x-2)\right]$. Θέτω x-2=u οπότε $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2) = 0$

Άρα, $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[-\ln(x-2)\right] = \lim\limits_{u\to 0^+}[-\ln u] = -(-\infty) = +\infty$ οπότε η x=2 κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f^{-1}.

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει ως συμμετρική της γραφικής παράστασης της f^{-1} ως προς την ευθεία y=x.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R, άρα και συνεχής στο R, επομένως και συνεχής στο 1. Έτσι, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$. Είναι

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+\alpha) = 1+\alpha \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(e^{x-1}+\beta x) = 1+\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \beta.$$ Είναι f(1)=1+α.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\alpha-(1+\alpha)}{x-2} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-(1+\alpha)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1} \underset{dh}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta\right) = \beta+1$$

Τελικά, $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Leftrightarrow$ β+1=2 $\Leftrightarrow$ β=1. Άρα, α=1.

Γ2. Για α=β=1 έχουμε: $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+x, & x<1 \end{cases}$. Η f είναι συνεχής στο 1.

Για $x>1$, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=2x>0$.

Για x<1, η f είναι παραγωγίσιμη με $f(x)=e^{x-1}+1>0$.

Επειδή, η f είναι συνεχής στο R με f΄(x)>0 για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R έχουμε ότι

$f(D_f)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$,

γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)\underset{x\to-\infty\Rightarrow u\to-\infty}{\overset{u=x-1}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\left(e^u+u+1\right)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$.

Γ3. i) Ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα [-1, 0] με $f(0)=\frac{1}{e}>0$ και $f(-1)=\frac{1}{e^2}-1=\frac{1-e^2}{e^2}<0$.

Επομένως, f(0)f(-1)<0, άρα από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 στο (-1, 0) και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R η ρίζα είναι μοναδική. Επομένως, η f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα x_0 η οποία είναι αρνητική.

Β΄ΤΡΟΠΟΣ

Το $0\in f(D_f)$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in R$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό.

Έστω ότι $x_0\geq 0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_0)\geq f(0)\Leftrightarrow f(x_0)\geq\frac{1}{e}>0$, που είναι άτοπο. Άρα $x_0<0$.

Γ΄ ΤΡΟΠΟΣ

Έστω Α=$(-\infty,0)$ στο οποίο η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

Είναι f(A)= ($\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$)=$\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$. Το $O\in f(A)$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in A$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το x_0 είναι μοναδικό. Επομένως, η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία είναι αρνητική.

ii) Για $x>x_0$ επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει ότι $f(x)>f(x_0)\Rightarrow f(x)>0\Rightarrow f^2(x)>0$.

Είναι $x_0<0\Rightarrow -x_0>0\Rightarrow -f(x)x_0>0$. Έτσι, $f^2(x)-f(x)x_0>0$, άρα η εξίσωση $f^2(x)-x_0f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

Γ4. Τη χρονική στιγμή t_0 ισχύει ότι $x(t_0)=3$, $y(t_0)=10$ και $x'(t_0)=2$μονάδες/sec. Επίσης, $y(t)=x^2(t)+1$. Για το εμβαδό του τριγώνου ισχύει ότι $E(t)=\frac{1}{2}x(t)y(t)=\frac{x(t)\left[x^2(t)+1\right]}{2}=\frac{x^3(t)+x(t)}{2}$ με $t\geq 0$. Άρα, $E'(t)=\frac{3x^2(t)x'(t)+x'(t)}{2}=\frac{x'(t)(3x^2(t)+1)}{2}$ με $t\geq 0$. Άρα,

$$E'(t_0)=\frac{x'(t_0)(3x^2(t_0)+1)}{2}=\frac{2(3\cdot 3^2+1)}{2}=28\,\text{τ.μ.}/\sec$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)+\alpha x+\beta$, όπου $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}+\alpha=$$

$$=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha\,.$$

Επειδή η ευθεία (ε): $y=-x+2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο A(1, 1) ισχύουν ότι $f(1)=1$ και $f'(1)=-1$. Άρα, $f'(1)=-1\Leftrightarrow \alpha=-1$ και $f(1)=1\Leftrightarrow \alpha+\beta=1 \overset{\alpha=-1}{\Leftrightarrow} \beta=2$.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\Omega)=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2+x-2\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)\right|dx\,.$$

Όμως για $x\geq 1$ είναι $x-1\geq 0$ και $\ln\left(x^2-2x+2\right)=\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$, επομένως $(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)\geq 0$. Έτσι, $E(\Omega)=\int_1^2(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx$.

Θέτω $u=x^2-2x+2$, άρα $du=(2x-2)dx$, οπότε $\frac{1}{2}du=(x-1)dx$.

Όταν x=1, τότε u=1

Όταν x=2, τότε u=2

Έτσι, $E(\Omega)=\int_1^2(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\ln u\,du=\frac{1}{2}\int_1^2(u)'\ln u\,du=\frac{1}{2}\left\{\left[u\ln u\right]_1^2-\int_1^2 u\left(\ln u\right)'du\right\}=\frac{1}{2}\left\{2\ln 2-\int_1^2 u\frac{1}{u}du\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{2\ln 2-\int_1^2 du\right\}=\frac{1}{2}\left\{2\ln 2-\left[u\right]_1^2\right\}=\frac{1}{2}\left\{2\ln 2-1\right\}=(\ln 2-\frac{1}{2})\text{τ.μ.}$$

Δ3. i) Έστω $\kappa(x)=f(x)+x$, ορισμένη στο R. Η κ είναι παραγωγίσιμη στο R με $\kappa'(x)=f'(x)+1=$

$= \ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}+1-1=\ln\left[\left(x-1\right)^2+1\right]+\dfrac{2\left(x-1\right)^2}{(x-1)^1+1}\geq 0$ για κάθε $x\in R$. Επομένως, $\kappa'(x)\geq 0 \Leftrightarrow f'(x)+1\geq 0 \Leftrightarrow f'(x)\geq -1$, για κάθε $x\in R$.

ii) Θα αποδείξουμε ότι $f(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda\geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2} \Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\geq f(\lambda)-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}$.

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}]$, επομένως

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}=\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$. Από το Δ3(i) ισχύει ότι $f'(x)\geq -1$, για κάθε $x\in R$, επομένως $f'(\xi)\geq -1 \Leftrightarrow$

$\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}\geq -1 \Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}$.

Β΄ΤΡΟΠΟΣ

Η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε γίνεται

$f(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda\geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)+\frac{3}{2} \Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2)-\lambda+2-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})\geq f(\lambda)-\frac{1}{2} \Leftrightarrow f(\lambda+\frac{1}{2})+\lambda+\frac{1}{2}\geq f(\lambda)+\lambda$ (1) Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε την (1).

Έστω η συνάρτηση $w(x)=f(x)+x$, ορισμένη στο R. Η w είναι παραγωγίσιμη στο R με $w'(x)=f'(x)+1\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=1. Έτσι, η w είναι γνησίως αύξουσα στο R, επομένως η (1) γίνεται:

$\kappa(\lambda+\frac{1}{2})\geq \kappa(\lambda) \Leftrightarrow \lambda+\frac{1}{2}\geq\lambda \Leftrightarrow \frac{1}{2}\geq 0$, η οποία ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

Δ4. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=-3x^2-1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο K(0, g(0)) ή K(0, 2) είναι (ε): $y-g(0)=g'(0)(x-0) \Leftrightarrow y-2=-1(x-0) \Leftrightarrow y=-x+2$, η οποία είναι ίδια με την εφαπτομένη της f στο A(1, 1), άρα οι C_f, C_g έχουν μία τουλάχιστον κοινή εφαπτομένη.

Για κάθε $x\in R$ ισχύει $f'(x)\geq -1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=1.

Για κάθε $x\in R$ ισχύει $g'(x)=-3x^2-1\leq -1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x=0.

Άρα, για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $g'(x)<-1$ και $f'(x)\geq -1$, επομένως οι C_f και C_g δεν έχουν άλλη κοινή εφαπτομένη. Έτσι, μοναδική κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g η y=-x+2.