ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(Ενδεικτικές απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο – Σελίδα 76
Α2. Σχολικό βιβλίο – Σελίδα 104
Α3. α. Ψευδής

β. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=x^3$ με $f'(x)=3x^2$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα όμως $f'(x)=3x^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, γιατί f’(0) = 0.

Α4. α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$D_{f\circ g}=\{x\in D_g\,/\,g(x)\in D_f\}\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^x\in(1,+\infty)\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,e^x>1\}=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x>0\}=(0,+\infty)$$

Για x > 0 έχουμε: $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(e^x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

Επομένως, $(f\circ g)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$ με x > 0.

Β2. Η συνάρτηση $(f\circ g)$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με

$$(f\circ g)'(x)=\left(\frac{e^x+2}{e^x-1}\right)'=\frac{(e^x+2)'(e^x-1)-(e^x+2)(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x(e^x-1)-e^x(e^x+2)}{(e^x-1)^2}=\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-2e^x}{(e^x-1)^2}=$$

$$=-\frac{3e^x}{(e^x-1)^2}<0\ .$$

Επομένως, η $f\circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και ‘1-1’, οπότε αντιστρέφεται.

Η $f\circ g$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,\ +\infty)$ έτσι, έχει σύνολο τιμών το $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ g)(x),\lim\limits_{x\to 0^+}(f\circ g)(x)\right)=(1,+\infty)$ γιατί

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(1+\dfrac{2}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}=1$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(f\circ g)(x)=\lim\limits_{x\to 0^x}\dfrac{e^x+2}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+2)\cdot\dfrac{1}{e^x-1}=+\infty$, επειδή $\lim\limits_{x\to 0^x}(e^x+2)=3>0$ και $x>0\Rightarrow e^x>e^0\Rightarrow e^x-1>0$ με $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1)=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^x-1}=+\infty$.

Έτσι, για x > 0 και y > 1 έχουμε:

$$(f\circ g)(x)=y\Leftrightarrow\frac{e^x+2}{e^x-1}=y\Leftrightarrow e^x+2=y(e^x-1)\Leftrightarrow e^x+2=ye^x-y\Leftrightarrow ye^x-e^x=y+2\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow e^x(y-1)=y+2 \Leftrightarrow e^x=\frac{y+2}{y-1} \overset{\ln x\ 1-1}{\Leftrightarrow} \ln e^x=\ln\frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow x=\ln\frac{y+2}{y-1}$

Τελικά, $(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ με x > 1.

Β3. Η φ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $\phi'(x)=\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)'=\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=$

$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{(x+2)'(x-1)-(x+2)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}<0$ για x > 1.

Έτσι, η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο (1, +∞).

Β4. Α' τρόπος

Στο $\lim\limits_{x\to1^+}\phi(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$. Θέτω $u=\frac{x+2}{x-1}$ με $\lim\limits_{x\to1^+}u=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}(x+2)\cdot\frac{1}{x-1}=+\infty$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to1^+}\phi(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}\lim u=+\infty$.

Στο $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ θέτω $u=\frac{x+2}{x-1}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=1$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln1=0$.

Β' τρόπος

Η φ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (1, +∞) με σύνολο τιμών $\phi((1+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x),\lim\limits_{x\to1^+}\phi(x)\right)=(0,+\infty)$.

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\phi(x)=+\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f συνεχής, οπότε η f συνεχής και στο $x_0 = 0$. Έτσι, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$.

Είναι

- $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=\lambda$
- $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=1-\ln\lambda$
- f(0) = 1 – lnλ

Άρα, $\lambda=1-\ln\lambda \Leftrightarrow \ln\lambda+\lambda-1=0$ (1)

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\ln x+x-1,\ x>0$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με $g'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ στο (0, +∞).

Έτσι, η g γνησίως αύξουσα στο (0, +∞) άρα και 1 – 1.

Είναι g(1) = ln1 + 1 – 1 = 0.

Έτσι, η (1) $\Rightarrow g(\lambda)=g(1) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} \lambda=1$.

Γ2. Για λ = 1 έχουμε $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x\le0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

Έχουμε

- $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{1-x}=1$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ημx+συνx-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\dfrac{ημx}{x}+\dfrac{συνx-1}{x}\right]=1+0=1$

Επομένως, f′(0) = 1, άρα ορίζεται η εφαπτομένη της f στο σημείο Α(0, 1).

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Α(0, 1). Τότε εφω=f′(0)=1, άρα ω = $\dfrac{π}{4}$.

Γ3. Κρίσιμα σημεία για την f είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή ισχύει f′(x) = 0.
Από το ερώτημα Γ2 έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε το 0 δεν είναι κρίσιμο σημείο.

Είναι $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x)^2}, & x\le 0\\ συνx-ημx, & 0<x<\dfrac{3π}{2}\end{cases}$

- Αν $x\le 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}>0$ οπότε η f δεν έχει ρίζες στο (-∞, 0].
- Αν $0<x<\dfrac{3π}{2}$ έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow συνx-ημx=0 \Leftrightarrow ημx=συνx \quad (1)$

Για $x=\dfrac{π}{2}$ ή (1) $\Rightarrow 1=0$ άτοπο.

Για $x\ne\dfrac{π}{2}$ η (1) $\Rightarrow ημx=συνx \Leftrightarrow \dfrac{ημx}{συνx}=1 \Leftrightarrow εφx=1$.

Άρα $x=κπ+\dfrac{π}{4},\ κ\in\mathbb{Z}$.

Όμως $0<x<\dfrac{3π}{2} \Leftrightarrow 0<κπ+\dfrac{π}{4}<\dfrac{3π}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{π}{4}<κπ<\dfrac{3π}{2}-\dfrac{π}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{π}{4}<κπ<\dfrac{5π}{4} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}<κ<\dfrac{5}{4}$ και επειδή $κ\in\mathbb{Z}$ είναι κ = 0, κ = 1.

Για κ = 0 είναι $x=\dfrac{π}{4}$.

Για κ = 1 είναι $x=\dfrac{5π}{4}$.

Έτσι, κρίσιμα σημεία τα $x=\dfrac{π}{4}$ και $x=\dfrac{5π}{4}$.

Γ4. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Μ(α, f(α)) έχει εξίσωση της μορφής $y-f(α)=f'(α)(x-α)$ (1) η οποία τέμνει τον άξονα x′x στο σημείο Β(x, 0).

Η (1) για y = 0: $-f(α)=f'(α)(x-α) \Leftrightarrow -\dfrac{1}{1-α}=\dfrac{1}{(1-α)^2}(x-α) \Leftrightarrow α-1=x-α \Leftrightarrow x=2α-1$

Άρα, $x(t)=2α(t)-1$ και $x'(t)=2α'(t)$. Τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε $α(t_0)$ = -1 και

$x'(t_0)=2α'(t_0)=2\left(-\dfrac{α(t_0)}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}(-1)=\dfrac{2}{3}μον/sec$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f(x)=e^x+x^2-ex-1$ με $D_f=\mathbb{R}$.

Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x+2x-e$ και $f''(x)=e^x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Έτσι, η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Η f′ είναι συνεχής στο [0, 1] με f′(0) = 1 – e < 0 και f′(1) = 2 > 0.
Έτσι, $f'(0)\cdot f'(1)<0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0∈(0, 1) τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$ και επειδή η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ το x_0 είναι μοναδικό.

Έχουμε

- $x < x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$
- $x > x_0 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_0)$

x_0	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

Άρα για $x = x_0$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Έχουμε $f'(x_0) \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$ (1)

Άρα $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - ex_0 - 1 \overset{(1)}{=} e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$.

Δ2. Η f παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο. Άρα, ισχύει $f(x) \geq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_0$.
Άρα για x κοντά στο x_0 έχουμε $f(x) - f(x_0) > 0$.
Έτσι, για x κοντά στο x_0 έχουμε

$$-1 \leq \eta\mu\frac{1}{x-x_0} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1 \leq \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\frac{1}{x-x_0} \leq \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + 1 \quad (2)$$

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$ και $\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)} > 0$ κοντά στο x_0. Άρα, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)} = +\infty$.

Έτσι

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1\right) = +\infty \\ \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + 1\right) = +\infty \end{aligned}\right\} \underset{(2)}{\overset{\kappa.\pi.}{\Rightarrow}} \lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\eta\frac{1}{x-x_0}\right) = +\infty$$

Δ3. Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x - x_0$ ορισμένη στο $[x_0, 1]$ όπου x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1.
Η g είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως πράξεις συνεχών με $g(1) = f(1) + 1 - x_0 \overset{f(1)=0}{=} 1 - x_0 > 0$ γιατί $x_0 < 1$ και

$g(x_0) = f(x_0) + x_0 - x_0 = f(x_0) < 0$ γιατί: $x_0 < 1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) < f(1) \Leftrightarrow f(x_0) < 0$.
Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε
$g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho = x_0$
Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[x_0, 1]$ με $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \geq x_0$.
Επομένως υπάρχει μοναδικό $\rho \in (x_0, 1)$ τέτοιο ώστε $g(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho = x_0$.

Δ4. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa)+1) \Leftrightarrow f(x_0) > (x_0-\rho)(f'(\kappa)+1) \overset{x_0-\rho<0}{\Leftrightarrow} \frac{f(x_0)}{x_0-\rho} < f'(\kappa)+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{x_0-\rho} - 1 < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{x_0-\rho} - \frac{x_0-\rho}{x_0-\rho} < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(x_0)-(x_0-\rho)}{x_0-\rho} < f'(\kappa) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho} < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0} < f'(\kappa).$$

Η f συνεχής στο $[x_0, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ), οπότε από το θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0}$.

Επειδή $\kappa \in (\rho, 1)$ είναι $\xi < \kappa \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) < f'(\kappa) \Leftrightarrow \dfrac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho-x_0} < f'(\kappa)$.