(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α
Α1. Σχολικό βιβλίο
Α2. Σχολικό βιβλίο
Α3. Σχολικό βιβλίο
Α4. α. Σωστό β. Λάθος γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β
Β1. f(x+1) = (x+1)e^{-x}
Έστω $u = x + 1 \Leftrightarrow x = u - 1$

$$f(u) = ue^{-(u-1)} = ue^{1-u}$$

Άρα $f(x) = x \cdot e^{1-x}, x \in \mathbb{R}$

Β2. $f'(x) = (x)' \cdot e^{1-x} + x \cdot (e^{1-x})' = e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (1-x)' = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x), x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x) = 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

f γνησίως αύξουσα στο (-∞, 1]
f γνησίως φθίνουσα στο [1, +∞)
Μέγιστο στο x = 1 το f(1) = 1

Β3. $f''(x) = (e^{1-x})'(x-1) + e^{1-x}(1-x)' = -e^{1-x}(1-x) + e^{1-x}(-1) = e^{1-x}(-1+x-1) = e^{1-x}(x-2)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	∩		∪

f κοίλη στο (-∞, 2]
f κυρτή στο [2, +∞)
Σημείο καμπής στο x = 2 το $A\left(2, \frac{2}{e}\right)$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x \cdot e^{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$
  Δεν έχει ασύμπτωτη στο -∞.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x \cdot e^{1-x}) \overset{(\infty\cdot 0)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(e^{x-1})'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$
  Η y = 0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο +∞.

Β4. i.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (xe^{1-x}) \overset{(-\infty)(+\infty)}{=} -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots. = 0$

Στο Δ_1 = (-∞, 1] η f είναι γνησίως αύξουσα
f(Δ_1) = (-∞, 1]
Στο Δ_2 = (1, +∞) η f είναι γνησίως φθίνουσα
f(Δ_2) = (0, 1)
Άρα το σύνολο τιμών είναι το $f(D_f) = (-\infty, 1]$.
ii.

- Αν λ∈ $(-\infty, 0]$ ή λ = 1 έχει μία ρίζα.
- Αν λ∈(0, 1) έχει δύο ρίζες.

ΘΕΜΑ Γ
Γ1.

- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = lim(\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \sigma\upsilon\nu x = 1$$

f(0) = 1
Επειδή $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$ συνεχής

- $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x(\alpha x^2-3x-1)}{x} = -1$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

$\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ όχι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. i.

- f συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$
- f παραωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$
- f(0) = 1, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

Άρα ΔΕΝ ισχύει Rolle

ii. Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ έχω f(x) = συνx με f'(x) = -ημx

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0 \\ \eta\mu\pi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \eta\mu x = \eta\mu\pi \Leftarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \pi \\ x = 2\kappa\pi \end{cases}$$

Όμως

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2\kappa\pi + \pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \kappa < \frac{1}{4} \\ \kappa \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow \kappa = 0 \acute{\alpha}\rho\alpha x_0 = \pi$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < x < \dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2\kappa\pi < \dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 0 < \kappa < \dfrac{3}{4} \\ \kappa \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow \delta\varepsilon\nu\ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ \kappa \in \mathbb{Z}$$

Οπότε μοναδική λύση x_0=π.

Γ3. Για x < 0 έχω $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x - 1$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\alpha x^2 - 6x - 1 = 0$ με Δ = 36 + 12α < 0 αφού $\alpha < -3 \Leftrightarrow 12\alpha < -36 \Leftrightarrow 36 + 12\alpha < 0$
δηλαδή f'(x) ≠ 0 για x < 0.
Για να είναι (ε)//x'x πρέπει f'(x_0) = 0 αδύνατο για x < 0.

Γ4.

- Για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ έχω f'(x) = -ημx

Αφού ημx > 0 στο (0, π) και ημx < 0 στο $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

- Για x < 0 έχουμε f'(x) = 3αx^2-6x – 1 με Δ < 0 άρα f'(x) < 0 (3α < 0) όποτε f↓ στο (-∞, 0]

Συνεπώς

x	-∞		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
f'(x)		-	‖	-	0	+	
f		↘		↘		↗	

- f(x) συνεχής και ↓ στο (-∞, 0] άρα έχει ΣΤ το $f(0), \lim_{x\to-\infty} f(x)\Big) = [1, +\infty)$

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(\alpha x^3 - 3x^2 - x + 1) = \lim_{x\to-\infty}(\alpha x^3) = \alpha(-\infty) \overset{\alpha<-3}{=} +\infty\right)$$

- f(x) συνεχής και ↓ στο [0, π] άρα έχει ΣΤ το $[f(\pi), f(0)] = [-1,1]$
- f(x) συνεχής και ↑ στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ άρα έχει ΣΤ το $\left[f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = [-1,0]$

Συνεπώς το ΣΤ της f(x) είναι το [-1, +∞) δηλαδή f(x) ≥ -1 για $x \in -\infty, \frac{3\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $w(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, ορισμένη στο (0, +∞). Η w είναι συνεχής στο [1, e] ως πράξεις συνεχών

$$\left.\begin{array}{l} w(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0 \\ w(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow w(1)\cdot w(e) < 0$$

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$w(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0} (1)$$

Η w είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με $w'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, άρα η w είναι γνησίως αύξουσα στο (0, +∞), οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με $f'(x) = (\ln x_0) - \frac{1}{x}$. Για x > 0 έχουμε:

- $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x} = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = x_0$
- $f'(x_0) > 0 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \ln x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} \underset{x_0>0}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} x > x_0$
- $f'(x_0) < 0 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \ln x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{x_0} \underset{x_0>0}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} x < x_0$

x	0		x_0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖	↘		↗	

Άρα, η f έχει ελάχιστο για x=x_0 το $f(x_0) = \ln x_0 (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = \frac{1}{x_0}(x_0+1) - \frac{1}{x_0} - 1 = 1 + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 0$

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ έχει μοναδική λύση. Επειδή $\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} > 0$για κάθε $x \in \mathbb{R}$, πρέπει και $xe^{-x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Οπότε για x > 0 έχουμε:

$$x\cdot e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \overset{\ln x1-1}{\Leftrightarrow} \ln\frac{x}{e^x} = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x - \ln e^x = (x+1)\cdot\ln\frac{x_0}{e} \Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\cdot(\ln x_0 - \ln e) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)\cdot\ln x_0 - (x+1) (2)$$

Για x > 0 ισχύει ότι $f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1 \Leftrightarrow (\ln x_0)(x+1) = f(x) + \ln x + 1 (3)$

$$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} \ln x - x = f(x) + \ln x + 1 - (x+1) \Leftrightarrow \ln x - x = f(x) + \ln x + 1 - x - 1 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

όπου από το Δ2 έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό x0 τέτοιο ώστε f(x_0) = 0.

Άρα, C_g, C_h έχουν μοναδικό κοινό σημείο με τετμημένη x_0.

Είναι $g'(x) = (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} ln\frac{x_0}{e}$.

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη οι C_g, C_h αρκεί να ισχύει $g'(x_0) = h'(x_0)$. Πράγματι,

$$g'(x_0) = h'(x_0) \Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} ln\frac{x_0}{e} \Leftrightarrow \frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \cdot (ln\, x_0 - ln\, e)$$

$$\frac{1-x_0}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \cdot \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \Leftrightarrow \frac{\boxed{1-x_0}}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \cdot \left(\frac{\boxed{1-x_0}}{x_0}\right) \overset{x_0 \neq 1}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0}}{e^{x_0+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{x_0^{x_0}}{e^{x_0} \cdot e} \Leftrightarrow 1 = \frac{x_0^{x_0}}{e} \Leftrightarrow x_0^{x_0} = e \overset{\ln x 1-1}{\Leftrightarrow} \ln x_0^{x_0} = \ln e \Leftrightarrow$$

$$x_0 \cdot ln\, x_0 = 1 \Leftrightarrow ln\, x_0 = \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow ln\, x_0 - \frac{1}{x_0} = 0$$

που ισχύει λόγω της (1). Επομένως, οι C_g, C_h έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0.

Δ4. Η απόσταση των Α(x, f(x)), Β(x, φ(x)) με x > 0 είναι

$$d(x) = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x) - \varphi(x))^2} = \sqrt{(f(x) - \varphi(x))^2} = |f(x) - \varphi(x)| \overset{f(x)-\varphi(x)>0}{=} f(x) - \varphi(x).$$

Η απόσταση των Α, Β γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$.

- Αν η φ είναι παραγωγίσιμη, τότε η d παραγωγίσιμη με $d'(x) = f'(x) - \varphi'(x)$.

  Η d έχει ελάχιστο στο x_0, άρα $d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0 \overset{f'(x_0)=0}{\Leftrightarrow} \varphi'(x_0) = 0$, οπότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο.
- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.