Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελίδα 186 σχολικού βιβλίου.
Α2. Ορισμός σελίδα 142 σχολικού βιβλίου.
Α3. Ορισμός σελίδα 161 σχολικού βιβλίου.
Α4.
α. ΣΩΣΤΟ
β. ΣΩΣΤΟ
γ. ΣΩΣΤΟ
δ. ΛΑΘΟΣ
ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για το πεδίο ορισμού της fog πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \rightarrow D_{fog} = [0,1]$$

Με τύπο:

$$h(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Β2. : $h'(x) = 2(x-1) \cdot (x-1)' = 2(x-1) < 0$στο [0,1] άρα h γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της h άρα h 1-1 ως γνησίως μονότονη συνάρτηση.
Για τον τύπο της h^{-1}θέτω :

$$y = h(x) \rightarrow y = (x-1)^2 \rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{(x-1)^2} \rightarrow$$

$$\sqrt{y} = |x-1| \overset{x\in[0,1]}{\rightarrow} \sqrt{y} = -(x-1) \rightarrow x = 1 - \sqrt{y}$$

Και επίσης το σύνολο τιμών της h είναι:

$$h([0,1]) \overset{h\searrow}{\rightarrow} [h(1), h(0)] = [0,1]$$

Το σύνολο τιμών της h είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της άρα:

$$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad D_{h^{-1}} = [0,1]$$

Β3. i) ο Η φ είναι συνεχής στο [0,1) ως πράξεις συνεχών και στο 1 διότι:

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x) = \lim_{x\to 1^-}\varphi(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$Άρα lim_{x\to 1}\varphi(x) = \varphi(1) = \frac{1}{2}$$

$$\varphi(0) = 1, \varphi(1) = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi(0) \neq \varphi(1)$$

Άρα , από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των φ(0) και φ(1) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ ώστε $\varphi(x_0) = \xi$.

ii) Δίνεται ότι $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, άρα το α ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο όπου εκεί το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, οπότε:

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6} < \eta\mu\alpha < \eta\mu\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1 \rightarrow \eta\mu\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Άρα, από το προηγούμενο ερώτημα, για κάθε αριθμό ημα μεταξύ των $f(0) = 1$και $f(1) = 1/2$υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = \eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε ότι $f'(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ 3x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$.

Για $x < -1$είναι $f'(x) = -2 \Leftrightarrow (f(x))' = (-2x)'$.

Από συνέπεια του ΘΜΤ υπάρχει $c_1 \in R$τέτοιο ώστε $f(x) = -2x + c_1$.

Για $x > -1$, είναι $f'(x) = 3x^2 - 1 \Leftrightarrow (f(x))' = (x^3 - x)'$

Από συνέπεια του ΘΜΤ υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$τέτοιο ώστε $f(x) = x^3 - x + c_2$

Από την υπόθεση δίνεται ότι f(0)=0, επομένως για x=0 έχουμε

$$f(0) = 0 - 0 + c_2 \Leftrightarrow 0 = c_2$$

Άρα για $x < -1$ είναι τελικά $f(x) = x^3 - x$

Επομένως, έχοντας υπόψιν ότι η f ορίζεται στο , ο τύπος της f μπορεί να γραφεί

$$f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & x < -1 \\ \kappa, & x = -1 \\ x^3 - x, & x > 1 \end{cases}$$

Εδώ είναι

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (-2x + c_1) = 2 + c_1$$
$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x^3 - x) = 0$$
$$f(-1) = \kappa$$

Η f είναι συνεχής στο R, άρα και στο 1, επομένως

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow 2 + c_1 = 0 = \kappa$$

Δηλαδή $c_1 = -2$και κ=0.

Τελικά ο τύπος της f γίνεται $f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > 1 \end{cases}$.

Γ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(x_o, f(x_0))$είναι

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \mu\varepsilon x_0 > -1$$

δηλαδή:

$$\varepsilon: y - (x_o^3 - x_o) = (3x_o^2 - 1)(x - x_o)$$

Η (ε) τέμνει τον άξονα y'y στο -2 άρα το σημείο$B(0, -2)$ επαληθεύει την (ε).

Οπότε για $x = 0, y = -2$, έχουμε

$$-2 - (x_o^3 - x_o) = (3x_o^2 - 1)(0 - x_o) \Leftrightarrow -2 - x_o^3 + y_o = -3x_o^3 + y_o \Leftrightarrow$$
$$-2 - x_o^3 + 3x_o^3 = 0 \Leftrightarrow 2x_o^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x_o^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x_o = 1$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι η ευθεία

$$\varepsilon: y - (1^3 - 1) = (3 \cdot 1^2 - 1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 0 = 2 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

Γ3. Το σημείο $M(x, y), x > 2$, βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$, άρα είναι $M(x, 2x - 2)$.

Η προβολή του Μ πάνω στον άξονα x'x είναι το σημείο $K(x, 0)$

Το εμβαδό του τριγώνου ΜΚΓ δίνεται από τη σχέση

$$E=\frac{\beta\cdot\upsilon}{2}=\frac{(\Gamma K)\cdot(MK)}{2}=\frac{(x-2)(2x-2)}{2}=\frac{2(x-2)(x-1)}{2}=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2, x>2$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση του εμβαδού E ως προς το χρόνο που είναι η

$$E(t)=x^2(t)-3x(t)+2$$

Η E είναι παραγωγίσιμη ως προς t ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$E'(t)=2x(t)\cdot x'(t)-3x'(t)$$

Από την υπόθεση, για τη χρονική στιγμή $t=t_o$, έχουμε ότι

$$x(t_o)=3 \kappa\alpha\iota x'(t_o)=2\mu/\text{sec}$$

Άρα

$$E'(t_o)=2x(t_o)\cdot x'(t_o)-3x'(t_o)=2\cdot3\cdot2-3\cdot2=12-6=6\mu^2/\text{sec}$$

Γ4. Έχουμε $f(x)=-2x-2, x\le -1$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

Είναι $\left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|=\left|\frac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu f(x)\right|$

Όμως $|\eta\mu f(x)|\le 1$, επομένως $\left|\frac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu f(x)\right|=\left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot|\eta\mu f(x)|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|$

Από ιδιότητες απόλυτων τιμών προκύπτει $-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\le\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|$

Όμως, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right)\underset{\substack{x\to-\infty\\ u\to+\infty}}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{u}\right|\right)=0$

Και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right)\underset{\substack{u=f(x)\\ u\to+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|\frac{1}{u}\right|\right)=0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$

και ξεχωριστά το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3}$

Θέτω $u=-x$, όταν το $x\to-\infty$ τότε το $u\to+\infty$,

οπότε από $f(-x)=f(u)=u^3-u, u>-1$

παίρνουμε ότι $\lim\limits_{u\to+\infty}f(u)=\lim\limits_{u\to+\infty}(u^3-u)-\lim\limits_{u\to+\infty}u^3=+\infty$

Το όριο ισοδύναμα γίνεται

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{u^3+1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3}=1$$

Τελικά το ζητούμενο όριο ισούται με

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=0+1=1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f'(x)=1-\frac{3}{3x}=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow x=1$

και $f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{x-1}{x}>0\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$

Το πρόσημο της f’ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		‖	0	$-$	0	$+$	
f		‖		↘		↗	

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in (0,1]$ και γνησίως αύξουσα για $x \in [1, +\infty)$.
Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1 το $f(1) = 1 - ln\,3$

Έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x - ln(3x)) = +\infty$$

και $f(1) = 1 - ln\,3$

Επειδή $e < 3 \Leftrightarrow ln\,e < ln\,3 \Leftrightarrow 1 < ln\,3 \Leftrightarrow 1 - ln\,3 < 0 \Leftrightarrow f(1) < 0$
Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (0, 1], επομένως
$\Delta_1 = f((0,1]) = [1 - ln\,3\,, +\infty)$ και $0 \in [1 - ln\,3\,, +\infty)$.
Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.
Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 1], επομένως και «1-1», άρα το x_1 είναι μοναδικό.
Ακόμη
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 - ln\,3$ και $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}(x - ln(3x)) = \lim_{x\to +\infty}\left(x\left(1 - \frac{ln(3x)}{x}\right)\right) = +\infty$ διότι
$\lim_{x\to +\infty} \frac{ln(3x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{3}{3x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (1, +∞), επομένως
$\Delta_2 = f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x\to 1^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) = (1 - ln\,3\,, +\infty)$ και $0 \in (1 - ln\,3\,, +\infty)$.
Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$.
Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1], άρα και «1-1», άρα το x_2 είναι μοναδικό.
Επομένως υπάρχουν ακριβώς δύο $x_1 \in (0,1]$ και $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$.
ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

Επομένως η f είναι κυρτή στο (0, +∞).

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο ℝ, άρα και στο $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$.
Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx$.
Παρατηρούμε από τον πίνακα μονοτονίας της f ότι για $x \in [x_1, x_2]$ η f δε μηδενίζεται (από ερώτημα Δ1α) και είναι συνεχής. Επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Bolzano θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.
Επειδή $x_1 < 1 < x_2$ και $f(1) = 1 - ln\,3 < 0$, θα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$.
Επομένως το ζητούμενο εμβαδό γράφεται

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_2}^{x_1} f(x)dx =$$
$$= \int_{x_2}^{x_1}(x - ln(3x))dx = \int_{x_2}^{x_1} xdx - \int_{x_2}^{x_1} ln(3x)dx = I$$

Εδώ έχουμε

$\int_{x_2}^{x_1} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_2}^{x_1} = \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2}$ και

$$\int_{x_2}^{x_1} ln(3x)dx = \int_{x_2}^{x_1} (x)' \cdot ln(3x)dx =$$
$$= [x \cdot ln(3x)]_{x_2}^{x_1} - \int_{x_2}^{x_1} 3x \cdot ln(3x)'dx = [x_1 \cdot ln(3x_1) - 3x_2 \cdot ln(3x_2)] - \int_{x_2}^{x_1} 1dx =$$

$$= x_1\, ln(3x_1) - x_2 \cdot ln(3x_2) - \int_{x_2}^{x_1} 1dx =$$
$$= x_1\, ln(3x_1) - x_2 \cdot ln(3x_2) - [x]_{x_2}^{x_1} =$$
$$= x_1\, ln(3x_1) - x_2 \cdot ln(3x_2) - x_1 - x_2$$

Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι

$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 - ln(3x_1) = 0 \Leftrightarrow ln(3x_1) = x_1$ και

$$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - ln(3x_2) = 0 \Leftrightarrow ln(3x_2) = x_2$$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{x_2}^{x_1} ln(3x)dx = x_1\, ln(3x_1) - x_2 \cdot ln(3x_2) - x_1 - x_2 = x_1 \cdot x_1 - x_2 \cdot x_2 - x_1 - x_2 =$$
$$= x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2)$$

Επομένως

$$I = \int_{x_2}^{x_1} xdx - \int_{x_2}^{x_1} ln(3x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2) - [x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2)] =$$
$$= \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + x_2^2 - x_1^2 + x_1 - x_2 =$$
$$= \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - (x_2 - x_1) =$$
$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1)}{2} - \frac{2(x_2 - x_1)}{2} =$$
$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1 - 2)}{2}$$

Δ3. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2) > 0$

Όμως είναι $x_2 > x_1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$

Επομένως

$$x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 + 2 < 0 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$$

Επειδή $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$ είναι $2 - x_1 \in (1, +\infty)$ καιι $x_2 \in (0, +\infty)$

Σε αυτό το διάστημα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως

$$2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(2 - x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0$$

Δ4. Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο x_2 είναι

$$\varepsilon: y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Η f είναι κυρτή, άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ευθεία.

Άρα $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι $f(1) = 1 - ln\,3 \Leftrightarrow ln\,3 - 1 = -f(1)$.

Με αυτά υπόψιν, η ζητούμενη σχέση γράφεται διαδοχικά

$2f(x) + ln\,3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$

$$2f(x) + ln\,3 - 1 - f'(x_2)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$2f(x) - f(1) - f'(x_2)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(f(x) - f(1)) + \left(f(x) - f'(x_2)(x - x_2)\right) = 0$$

Είδαμε ότι η f έχει στο x = 1 ολικό ελάχιστο, επομένως

$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x = 1.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.