

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f , ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , ισχύει $f'(x) > 0$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**).

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B , αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'g$.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο \mathbb{R} και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f , του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x.$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

B2. Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x+2}{e^x-1}$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

B3. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1} = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

B4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta\mu x + \lambda \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2}, \text{ με } \lambda > 0. \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Γ4. Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \leq 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f .

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0 , κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1 .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_0) = x_0^2 - (e + 2)x_0 + e - 1.$$

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right],$$

όπου x_0 το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

Δ3. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_0$ για $x \in (x_0, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

Μονάδες 5

Δ4. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι $f(x_0) > f(\rho) (f'(\rho) + 1)$ για κάθε $\rho \in (x_0, 1)$.

Μονάδες 7