ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Θέμα Α

Α1. Θεωρία σχολικού σελίδα 111

Α2. Θεωρία σχολικού σελίδα 104

Α3. Θεωρία σχολικού σελίδα 128

Α4. Α)Λ , Β)Λ ,Γ)Λ ,Δ)Σ ,Ε)Σ

Θέμα Β

Β1. Για να ορίζεται η $g\circ h$ πρέπει:

$$\begin{cases} x\in D_h \\ h(x)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x\in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x>0.$$

Άρα $D_{g\circ h}=(0,+\infty)$.

Ο τύπος της είναι:

$$f(x)=(g\circ h)(x)=g(h(x))=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-x^2}{x}.$$

Β2. i) Είναι,

$$f(x)=\frac{4-x^2}{x}=\frac{4}{x}-x,\ x>0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$f'(x)=-\frac{4}{x^2}-1<0$ για κάθε $x>0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii) Είναι,

$$\pi>e\overset{f\searrow}{\Leftrightarrow}f(\pi)<f(e)\Leftrightarrow\frac{4-\pi^2}{\pi}<\frac{4-e^2}{e}\Leftrightarrow e(4-\pi^2)<\pi(4-e^2)\overset{4-e^2<0}{\Leftrightarrow}\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}\ .$$

Β3. Αναζητούμε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f στο $x_0=0$:

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{4-x^2}{x}=\lim_{x\to0^+}\left[\frac{1}{x}\cdot(4-x^2)\right]=+\infty$$

διότι $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(4-x^2)=4>0$. Άρα η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Πλάγια – οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}=-1=\lambda$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2+x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}\right)=0=\beta.$$

Άρα η ευθεία $y=-x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4. Έχουμε, $\left|\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)\right|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)}{f(x)}\right|\le\frac{1}{|f(x)|}\Leftrightarrow-\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)}{f(x)}\le\frac{1}{|f(x)|}$$

Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|}=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x}{4-x^2}\right|=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{\frac{4}{x}-x}\right|=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right)=0$$

επομένως από το Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)}{f(x)}=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει

$$\int_2^3 xf(x)dx=1\Leftrightarrow\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=1\Leftrightarrow\int_2^3(1+\alpha x)dx=1$$

$$\Leftrightarrow[x]_2^3+\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1$$

$$\Leftrightarrow 1+\alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1$$

$$\Leftrightarrow\alpha\left(\frac{9}{2}-\frac{4}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\alpha=0$$

Γ2. i) Είναι

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{x-1}}=-1$$

και

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-1}{x}=-1$$

Επειδή, $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$.
Συνεπώς ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

ii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ έχει εξίσωση

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-1(x-1)\Leftrightarrow y=-x+2$$

Αν είναι ω η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$ ισχύει

$$\varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow \omega=\frac{3\pi}{4}\ (\text{αφού } 0\le\omega<2\pi).$$

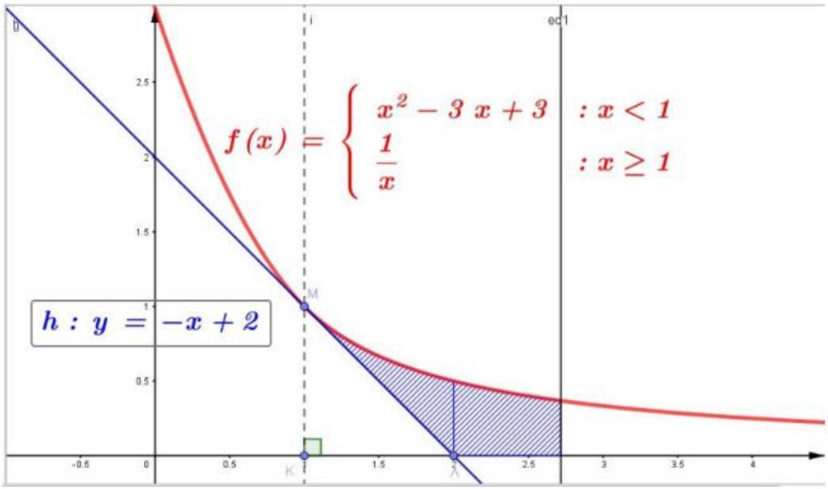
Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=2x-3<0$ (αφού $x<1\Leftrightarrow 2x<2\Leftrightarrow 2x-3<-1$)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ και $f'(1)=-1$ συνεπώς $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμη) άρα και στο $x_0=1$ ισχύει $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επομένως, η f είναι 1 – 1.
Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα

$$\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

Γ4. Η $\varepsilon: y=-x+2$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $\Lambda(2,0)$. Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$.
Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$. Επομένως η f είναι κυρτή στο $[1,+\infty)$ και η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής $M(1,1)$.



1ος τρόπος

$$E(\Omega)=\int_1^e f(x)dx-(K\Lambda M)=\int_1^e \frac{1}{x}dx-\frac{(K\Lambda)\cdot(KM)}{2}=[\ln x]_1^e-\frac{1}{2}=1-0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{ τ. μον.}$$

2ος τρόπος

$$E(\Omega)=\int_1^2 (f(x)-y)dx+\int_2^e f(x)dx$$

Όμως $\int_1^2 (f(x)-y)dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx=\left[\ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2=\ln 2+2-4-\left(0+\frac{1}{2}-2\right)=\ln 2-\frac{1}{2}$

$$\int_2^e f(x)dx=\int_2^e \frac{1}{x}dx=[\ln x]_2^e=1-\ln 2$$

Επομένως

$$E(\Omega)=\ln 2-\frac{1}{2}+1-\ln 2=\frac{1}{2}\text{ τ. μον.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $g:(0,1)\cup(1,2)\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1} \text{ για κάθε } x\in(0,1)\cup(1,2).$$

Η f είναι συνεχής στο D_f άρα

$$\lim_{x\to 1} g(x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to 1}(f(x)-2x)=\lim_{x\to 1}(g(x)\cdot(x-1))=1\cdot 0=0.$$

όμως

$$\lim_{x\to 1}(f(x)-2x)=\ln(2-1)-1+\kappa-2=\kappa-3.$$

οπότε

$$\kappa-3=0\Rightarrow\kappa=3.$$

Δ2. Για κάθε $x \in (0,2)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{-1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$$

Είναι

- $f'(x) = 0 \overset{x\in(0,2)}{\Leftrightarrow} x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας της f

x	0	1	2
$f'(x)$	+	0	-
f	↗		↘

Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $A_1 = (0,1]$ οπότε $f(A_1) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$

διότι

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(2-x) = \ln 2 \ \text{ και } \ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

και

$$f(1) = 2$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $A_2 = (1,2)$ οπότε

$$f(A_2) = \left(\lim_{x\to 2^-} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x)\right) = (-\infty, 2)$$

διότι

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$$

αφού

$$\lim_{x\to 2^-} \ln(2-x) \underset{2-x>0}{\overset{u=2-x}{=}} \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$$

και

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

Συνεπώς έχουμε ότι :

$0 \in f(A_1)$ και η f γνησίως αύξουσα στο A_1 οπότε υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

και

$0 \in f(A_2)$ και η f γνησίως φθίνουσα στο A_2 οπότε υπάρχει $x_2 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

Θα αποδείξουμε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$

Θα αποδείξουμε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$

1ος τρόπος

Είναι

$$0 < x_1 < \frac{1}{3} \underset{x\in(0,1)}{\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}} f(x_1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 < \ln\frac{5}{3} \text{ το οποίο ισχύει.}$$

2ος τρόπος

Έχουμε ότι

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(2 - x_1) + 3 - \frac{1}{x_1} = 0 \Leftrightarrow \ln(2 - x_1) = \frac{1}{x_1} - 3$$

Το $\ln(2 - x_1) > 0$ διότι $0 < x_1 < 1 \Leftrightarrow -1 < -x_1 < 0 \Leftrightarrow 1 < 2 - x_1 < 2$

οπότε $\frac{1}{x_1} - 3 > 0 \Leftrightarrow x_1 < \frac{1}{3}$

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$.

- Η f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
- Η f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1} .$$

Επίσης

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0 \text{ για κάθε } x \in (0,2).$$

Συνεπώς, η f' είναι γνησίως φθίνουσα οπότε το ξ που βρήκαμε είναι μοναδικό.

2ος τρόπος

Είναι, $f''(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ για κάθε $x \in (0,2)$. Η f' είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $(0,1]$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$, $f'(1) = 0$ και $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1} > 0$ άρα υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}.$$

Δ4 i) Αφού F αρχική της f θα είναι $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in(0,2)$ και όμοια, αφού G αρχική της f, άρα $G'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in(0,2)$, οπότε :

$$F'(x)=G'(x)\Leftrightarrow F(x)=G(x)+c \text{ , για κάθε } x\in(0,2) \text{ (1).}$$

Από (1) για $x=x_1$: $F(x_1)=G(x_1)+c\Leftrightarrow G(x_1)+c=0\Leftrightarrow G(x_1)=-c$ (2)

Από (1) για $x=x_2$: $F(x_2)=G(x_2)+c\Leftrightarrow F(x_2)=c$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2) και (3) : $F(x_2)+G(x_1)=0$.

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$, $x\in[x_1,x_2]$

Η συνάρτηση Φ είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών

$$\Phi(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=-x_2F(x_2)+x_1-x_2 \text{ (4)}$$

$$\Phi(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)+x_2-x_1 \text{ (5)}$$

Είναι $0<x_1<x_2<2$ άρα $x_1-x_2<0$ και $x_2-x_1>0$. Ακόμη :

$F'(x)=f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ γιατί για κάθε :

- $x\in[x_1,1]$ η f γν. αύξουσα άρα $x_1<x<1\Rightarrow 0=f(x_1)<f(x)\Rightarrow 0<f(x)$
- $x\in[1,x_2]$ η f γν. φθίνουσα άρα $1<x<x_2\Rightarrow f(x)>f(x_2)=0\Rightarrow f(x)>0$

Τελικά, $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ και αφού F συνεχής στο $[x_1,x_2]$ θα είναι F ↗ στο $[x_1,x_2]$, οπότε :

$$x_1<x_2\overset{F\nearrow}{\Rightarrow}F(x_1)<F(x_2)\Rightarrow 0<F(x_2)$$

Συνεπώς :

$$(4):\ \Phi(x_1)=-\underset{<0}{x_2}\,\underset{>0}{F(x_2)}+\underbrace{x_1-x_2}_{<0}<0$$

$$(5):\ \Phi(x_2)=\underset{>0}{x_1}\,\underset{>0}{F(x_2)}+\underbrace{x_2-x_1}_{>0}>0$$

Άρα η συνάρτηση Φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[x_1,x_2]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $\Phi(\xi)=0$.

Ακόμη, είναι

$$\Phi'(x)=x_1F'(x)+x_2G'(x)+2=x_1f(x)+x_2f(x)+2>0$$

γιατί όπως είδαμε $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$.

Έτσι, η συνάρτηση Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1,x_2]$, οπότε και '1 – 1' , άρα η ρίζα ξ είναι μοναδική.